弾性波動解析ソルバー

目次

第 1 章

基礎方程式及び離散式

以下に開発するソルバーの基本方程式と離散式を説明する.

1.1 基本方程式

1.1.1 流体中の音波

音波の基本方程式は粒子速度と圧力を用いて以下の式となる.

$$\frac{\partial}{\partial t}P = -\kappa\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{U}} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\dot{\boldsymbol{U}} = -\frac{1}{\rho}\nabla P \tag{1.2}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}} = \begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{w}\end{bmatrix} \tag{1.3}$$

P は圧力,$\dot{\boldsymbol{U}}$ は粒子速度ベクトル,κ は体積弾性率,ρ は密度とする. (1.1) は連続の式でありまた (1.2) は運動方程式である.

1.1.2 固体中の弾性波

固体中を伝播する弾性波の基本方程式は以下になる.

$$\boldsymbol{T} = [c]\boldsymbol{S} \tag{1.4}$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\dot{\boldsymbol{U}} = \nabla\boldsymbol{T} \tag{1.5}$$

(1.4) はフックの法則であり, また (1.5) は運動方程式である。

$\dot{\boldsymbol{U}}$ は粒子速度ベクトルで変位ベクトル $\boldsymbol{U}$ の時間微分である． $\boldsymbol{T}$ は応力テンソル、ρ は密度,$\boldsymbol{c}$ はスチフネステンソルである．$\boldsymbol{S}$ は歪テンソルと呼ばれ

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{U} + (\nabla\boldsymbol{U})^T\right) \tag{1.6}$$

で定義される．各行列成分は次に示すようになる.

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

$$\tag{1.9}$$

固体内の弾性波は縦波と横波を含んでいるので速度ベクトルを縦波 $\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{l}}$ と横波 $\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{t}}$ の二つのベクトル場を用いて表す.

ここで横波と縦波はベクトル速度ポテンシャル $\boldsymbol{A} = [A_1, A_2, A_3]$ とスカラ速度ポテンシャル ϕ を用いて以下で定義する.

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{l}} = \nabla\phi \tag{1.10}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{t}} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.11}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{1.12}$$

この時，ヘルムホルツの定理より速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{U}}$ はベクトル速度ポテンシャルとスカラ速度ポテンシャルを用いて以下のように表すことができる.

$$\dot{\boldsymbol{U}} = \nabla\phi + \nabla \times A \tag{1.13}$$

この式 (1.13) に $\nabla\cdot$ を作用させる.

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{U}} = \nabla^2\phi + \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) \tag{1.14}$$

ベクトル解析の恒等式より

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \tag{1.15}$$

であるから, 式 (1.14) は

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{U}} = \nabla^2 \phi \tag{1.16}$$

となる.

またこの式 (1.13) に $\nabla\times$ を作用させ

$$\begin{aligned} \nabla \times \dot{U} &= \nabla \times \nabla\phi + \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) \\ &= 0 + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \\ &= -\nabla^2 \boldsymbol{A} \end{aligned} \tag{1.17}$$

となる. ここでベクトル恒等式

$$\nabla \times \nabla\phi = 0 \tag{1.18}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{1.19}$$

を用いた.

よって式 (1.16) と式 (1.17) から速度ベクトル $\dot{U}$ が計算されれば, 縦波 (スカラ速度ポテンシャル), 横波 (ベクトル速度ポテンシャル) を解析できることになる.

1.2 解析方法

時間と空間について中心差分を取りいわゆる FDTD 法を用いて応力ベクトル $\boldsymbol{T}$ と速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{U}}$ を数値的に解析する。求められた応力と粒子速度から (1.13) の関係を用いて速度ポテンシャル $\dot{\boldsymbol{A}}$ とスカラ速度ポテンシャル $\dot{\phi}$ を求める。差分の精度については時間は 2 次精度, 空間については 2 次精度と 4 次精度を考慮する。

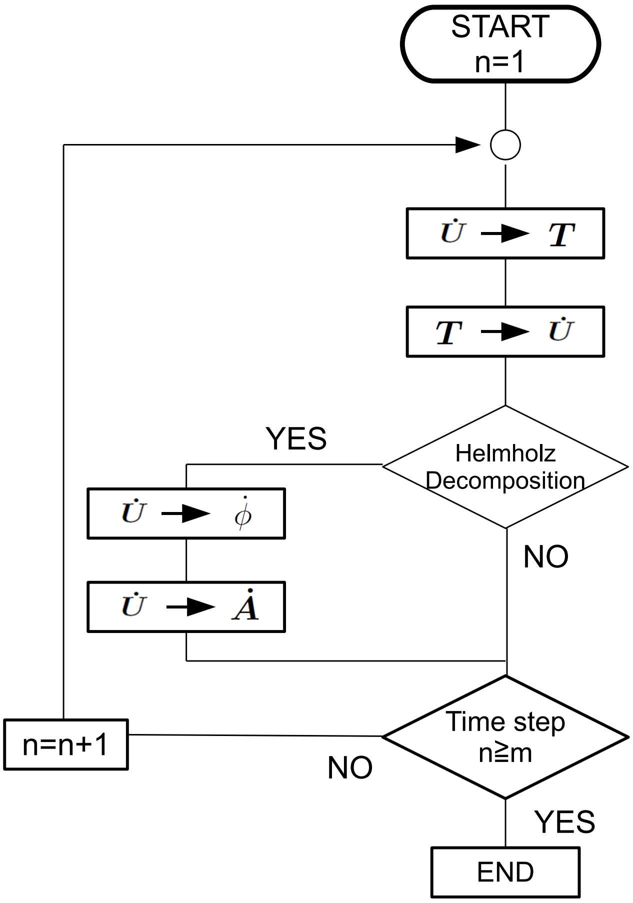

図 1.1: 計算のフローチャート図. 粒子速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{U}}$ から半ステップ時間後の応力 $\boldsymbol{T}$ が計算される。この応力ベクトルから粒子速度が計算され時間ステップを更新する．ヘルムホルツ分解をする場合は，関数を呼び出し粒子速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{U}}$ からスカラ及びベクトル速度ポテンシャル $\dot{\phi}$,$\dot{\boldsymbol{A}}$ が計算される.

1.2.1 速度ベクトル, 応力ベクトル

(1.4) と (1.5) を時間と空間について中心差分で離散化し応力及び粒子速度ベクトルを求める．その為にまず (1.4) を粒子速度と応力の関係に直し離散化し書き下す.

また応力テンソルおよび歪テンソルは一般には 3×3 のテンソル (T_{kl};$k,l=x\sim z$) 量であるが実際には $T_{kl}=T_{lk}$，$S_{kl}=S_{lk}$ の関係があるので、考慮すべき独立な成分は 6 つになる。簡単のためこの応力テンソルを独立な 6 つの成分 $T_1\sim T_6$ で表し計算する．同様にスチフネステンソルの各成分には $c_{ij}=c_{ji}$ の関係がある。
式 (1.6) より歪テンソルを成分で書くと

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}u & \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial y}u+\frac{\partial}{\partial x}v) & \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial z}u+\frac{\partial}{\partial x}w) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial y}u+\frac{\partial}{\partial x}v) & \frac{\partial}{\partial y}v & \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial y}w+\frac{\partial}{\partial z}v) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial z}u+\frac{\partial}{\partial x}w) & \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial y}w+\frac{\partial}{\partial z}v) & \frac{\partial}{\partial z}w \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

となる．$S_{kl}=S_{lk}$ の関係があるので

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} S_1\\ S_2\\ S_3\\ S_4\\ S_5\\ S_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_{xx}\\ S_{yy}\\ S_{zz}\\ 2S_{yz}=2S_{zy}\\ 2S_{zx}=2S_{xz}\\ 2S_{xy}=2S_{yx} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}u\\ \frac{\partial}{\partial y}v\\ \frac{\partial}{\partial z}w\\ \frac{\partial}{\partial z}v+\frac{\partial}{\partial y}w\\ \frac{\partial}{\partial z}u+\frac{\partial}{\partial x}w\\ \frac{\partial}{\partial y}u+\frac{\partial}{\partial x}v \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

とベクトルで表す.

同様に応力も 6 つの成分のベクトルで表せば

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} T_1\\ T_2\\ T_3\\ T_4\\ T_5\\ T_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T_{xx}\\ T_{yy}\\ T_{zz}\\ T_{yz}=T_{zy}\\ T_{zx}=T_{xz}\\ T_{xy}=T_{yx} \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

と書く事ができる．式 (1.4) より

$$\boldsymbol{T}=[\tilde{c}]\boldsymbol{S} \tag{1.23}$$

であるから

$$
\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{56} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\dot{u} \\ \frac{\partial}{\partial y}\dot{v} \\ \frac{\partial}{\partial z}\dot{w} \\ \frac{\partial}{\partial z}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{w} \\ \frac{\partial}{\partial z}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{w} \\ \frac{\partial}{\partial y}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{v} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
c_{11}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{12}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{13}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} + c_{14}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{w}) + c_{15}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{w}) + c_{16}(\frac{\partial}{\partial y}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{v}) \\
c_{21}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{22}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{23}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} + c_{24}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{w}) + c_{25}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{w}) + c_{26}(\frac{\partial}{\partial y}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{v}) \\
c_{31}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{32}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{33}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} + c_{34}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{w}) + c_{35}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{w}) + c_{36}(\frac{\partial}{\partial y}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{v}) \\
c_{41}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{42}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{43}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} + c_{44}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{w}) + c_{45}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{w}) + c_{46}(\frac{\partial}{\partial y}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{v}) \\
c_{51}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{52}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{53}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} + c_{54}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{w}) + c_{55}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{w}) + c_{56}(\frac{\partial}{\partial y}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{v}) \\
c_{61}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{62}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{63}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} + c_{64}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{w}) + c_{65}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{w}) + c_{66}(\frac{\partial}{\partial y}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{v})
\end{bmatrix} \tag{1.24}
$$

となる。

ただし等方性のある弾性固体の場合にはこのスチフネステンソル $\boldsymbol{c}$ は下記のように表される.

$$
\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \tag{1.25}
$$

したがって媒質が等方性弾性固体の場合には式 (1.24) を書き下せば以下のようになる.

$$
\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{12}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{12}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} \\ c_{12}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{11}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{12}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} \\ c_{12}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{12}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{11}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} \\ c_{44}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{w}) \\ c_{44}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{w}) \\ c_{44}(\frac{\partial}{\partial y}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{v}) \end{bmatrix} \tag{1.26}
$$

分かりやすく成分ごとに書けば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}T_1 &= c_{11}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{12}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{12}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} && (1.27)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_2 &= c_{12}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{11}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{12}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} && (1.28)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_3 &= c_{12}\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + c_{12}\frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + c_{11}\frac{\partial}{\partial z}\dot{w} && (1.29)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_4 &= c_{44}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{w}) && (1.30)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_5 &= c_{44}(\frac{\partial}{\partial z}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{w}) && (1.31)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_6 &= c_{44}(\frac{\partial}{\partial y}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial x}\dot{v}) && (1.32)
\end{aligned}
$$

この時フックの法則の式は

$$
\nabla_s = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{bmatrix} \tag{1.33}
$$

と ∇_s を定義すれば

$$
\boldsymbol{S} = \nabla_s \boldsymbol{U} \tag{1.34}
$$

であるから.

$$
\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{T} = [\tilde{c}]\nabla_s \dot{\boldsymbol{U}} \tag{1.35}
$$

と表すことができる

次に (1.5) を書き下す.

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}T_{xx} + \frac{\partial}{\partial z}T_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}T_{xy} \\ \frac{\partial}{\partial y}T_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}T_{yz} + \frac{\partial}{\partial x}T_{yx} \\ \frac{\partial}{\partial z}T_{zz} + \frac{\partial}{\partial y}T_{zy} + \frac{\partial}{\partial x}T_{zx} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}T_1 + \frac{\partial}{\partial z}T_5 + \frac{\partial}{\partial y}T_6 \\ \frac{\partial}{\partial y}T_2 + \frac{\partial}{\partial z}T_4 + \frac{\partial}{\partial x}T_6 \\ \frac{\partial}{\partial z}T_3 + \frac{\partial}{\partial y}T_4 + \frac{\partial}{\partial x}T_5 \end{bmatrix} && (1.36)
\end{aligned}
$$

成分に書き直せば

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\dot{u} \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x}T_1+\frac{\partial}{\partial z}T_5+\frac{\partial}{\partial y}T_6 \tag{1.37}$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\dot{v} \quad = \quad \frac{\partial}{\partial y}T_2+\frac{\partial}{\partial z}T_4+\frac{\partial}{\partial x}T_6 \tag{1.38}$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\dot{v} \quad = \quad \frac{\partial}{\partial z}T_3+\frac{\partial}{\partial y}T_4+\frac{\partial}{\partial x}T_5 \tag{1.39}$$

となる。これらの式を時間と空間についてそれぞれ中心差分で書き下し離散式を得る.

弾性体のスチフネステンソル $[\tilde{c}]$ や密度 ρ はセル中心の点でで与えられるのでセル中心以外の計算に使用するグリットト上でのこれら各種物性値の値は Lagrange 多項式により補間する．補間精度は２次と４次を選択可能とする.

1.2.2 スカラ速度ポテンシャル, ベクトル速度ポテンシャル

速度ベクトルとスカラ速度ポテンシャル, ベクトル速度ポテンシャルの関係を見るために式 (1.16) と式 (1.17) を書き下す．まず (1.16) より

$$\frac{\partial\dot{u}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{v}}{\partial y}+\frac{\partial\dot{w}}{\partial z} \quad = \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{1.40}$$

ここで

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=c_p^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right) \tag{1.41}$$

の関係があるので

$$\begin{aligned}\frac{\partial\dot{u}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{v}}{\partial y}+\frac{\partial\dot{w}}{\partial z} \quad &= \quad \frac{1}{c_p^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)\\ &= \quad \frac{1}{c_p^2}\left(\frac{\partial\dot{\phi}}{\partial t}\right)\end{aligned} \tag{1.42}$$

つぎに (1.17) を書き下す.

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\dot{w} - \frac{\partial}{\partial z}\dot{v} \\ \frac{\partial}{\partial z}\dot{u} - \frac{\partial}{\partial x}\dot{w} \\ \frac{\partial}{\partial x}\dot{v} - \frac{\partial}{\partial y}\dot{u} \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2}A_1 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}A_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}A_1 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}A_2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}A_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}A_2 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}A_3 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}A_3 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}A_3 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{c_s^2}\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2}A_1 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}A_2 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}A_3 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} \\
&= -\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial \dot{\boldsymbol{A}}}{\partial t} \qquad (1.43)
\end{aligned}
$$

整理すれば

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{c_s^2}\dot{A}_1 &= \frac{\partial}{\partial y}\dot{w} - \frac{\partial}{\partial z}\dot{v} \\
-\frac{1}{c_s^2}\dot{A}_2 &= \frac{\partial}{\partial x}\dot{u} - \frac{\partial}{\partial z}\dot{w} \\
-\frac{1}{c_s^2}\dot{A}_3 &= \frac{\partial}{\partial x}\dot{v} - \frac{\partial}{\partial y}\dot{u}
\end{aligned}
\qquad (1.44)
$$

となる. したがってすでに計算によって得られている速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{U}}$ からスカラ速度ポテンシャル, ベクトル速度ポテンシャルを求めることができる。ここで c_p と c_s は縦波速度と横波速度である.

1.2.3 2 次精度の差分式

2 次精度中心差分は以下の差分式を使う.

$$
\frac{\partial f}{\partial x}|_i = \frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \qquad (1.45)
$$

1.2.4 4 次精度の差分式

4 次精度の中心差分は以下の差分式を使う

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}|_i &= \frac{27(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}) - (f_{i+\frac{3}{2}} - f_{i-\frac{3}{2}})}{24\Delta x} + O(\Delta x^4) \\
&= \frac{9}{8\Delta x}(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{24\Delta x}(f_{i+\frac{3}{2}} - f_{i-\frac{3}{2}}) \qquad (1.46)
\end{aligned}
$$

この差分式は以下の方法で導出した．まず $f_{i+\frac{3}{2}}$,$f_{i+\frac{1}{2}}$,$f_{i-\frac{1}{2}}$,$f_{i-\frac{3}{2}}$ を $x=i$ の近傍でテーラー展開する。

$$
\begin{aligned}
f_{i+\frac{3}{2}} &= f_i + (\frac{3}{2}\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x}|_i + \frac{1}{2!}(\frac{2}{3}\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_i \\
&\quad + \frac{1}{3!}(\frac{3}{2}\Delta x)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}|_i + \frac{1}{4!}(\frac{3}{2}\Delta x)^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}|_i + O(\Delta x^5) \qquad (1.47) \\
f_{i+\frac{1}{2}} &= f_i + (\frac{\Delta x}{2})\frac{\partial f}{\partial x}|_i + \frac{1}{2!}(\frac{\Delta x}{2})^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_i \\
&\quad + \frac{1}{3!}(\frac{\Delta x}{2})^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}|_i + \frac{1}{4!}(\frac{\Delta x}{2})^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}|_i + O(\Delta x^5) \qquad (1.48) \\
f_{i-\frac{1}{2}} &= f_i - (\frac{\Delta x}{2})\frac{\partial f}{\partial x}|_i + \frac{1}{2!}(\frac{\Delta x}{2})^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_i \\
&\quad - \frac{1}{3!}(\frac{\Delta x}{2})^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}|_i + \frac{1}{4!}(\frac{\Delta x}{2})^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}|_i + O(\Delta x^5) \qquad (1.49) \\
f_{i-\frac{2}{3}} &= f_i - (\frac{3\Delta x}{2})\frac{\partial f}{\partial x}|_i + \frac{1}{2!}(\frac{3\Delta x}{2})^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_i \\
&\quad - \frac{1}{3!}(\frac{3\Delta x}{2})^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}|_i + \frac{1}{4!}(\frac{3\Delta x}{2})^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}|_i + O(\Delta x^5) \qquad (1.50)
\end{aligned}
$$

(1.47) − (1.50) より

$$
f_{i+\frac{3}{2}} - f_{i-\frac{3}{2}} = 2(\frac{3\Delta x}{2})\frac{\partial u}{\partial x}|_i + \frac{2}{3!}(\frac{3\Delta x}{2})^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}|_j + O(\Delta x^5) \qquad (1.51)
$$

また (1.48) − (1.49) より

$$
f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} = 2(\frac{\Delta x}{2})\frac{\partial u}{\partial x}|_i + \frac{2}{3!}(\frac{\Delta x}{2})^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}|_j + O(\Delta x^5) \qquad (1.52)
$$

を得る。 $(1.51) - 3^3 \times (1.52)$ より

$$
f_{i+\frac{3}{2}} - f_{i-\frac{3}{2}} - 27(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}) = -24(\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x}|_i + O(\Delta x^5) \qquad (1.53)
$$

よって

$$
\frac{\partial f}{\partial x}|_i = \frac{27(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}) - (f_{i+\frac{3}{2}} - f_{i-\frac{3}{2}})}{24\Delta x} + O(\Delta x^4) \qquad (1.54)
$$

を得る.

1.3 離散式

1.3.1 時間及び空間の 2 次精度離散式

時間および空間 2 次精度の離散式を気体（液体）中の音波と固体中の弾性波にわけて考える.

2 次精度離散式 - 気体，液体中の音波

(1.1) また (1.2) を二次精度の中心差分式を用いて離散化させる.

まず (1.1),(1.2) を展開すれば

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}P &= -\kappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\dot{u}+\frac{\partial}{\partial y}\dot{v}+\frac{\partial}{\partial z}\dot{w}\right) && (1.55)\\
\frac{\partial}{\partial t}\dot{u} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}P && (1.56)\\
\frac{\partial}{\partial t}\dot{v} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}P && (1.57)\\
\frac{\partial}{\partial t}\dot{w} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}P && (1.58)
\end{aligned}$$

となる。したがって (1.55) を二次の中心差分で書き下せば以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\frac{P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)-P^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)}{\Delta t} = &-\kappa\left(\frac{\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta x}\right)\\
&-\kappa\left(\frac{\dot{w}^n(i,j+\frac{1}{2},k)-\dot{w}^n(i,j-\frac{1}{2},k)}{\Delta y}\right)\\
&-\kappa\left(\frac{\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})}{\Delta z}\right)
\end{aligned} \tag{1.59}$$

ここで誤差評価のため P,$\dot{u}$,$\dot{v}$, および $\dot{w}$ をテーラー展開し上式に代入すると（式 (1.52) を参照）

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{2}{2^3 3!}\frac{\partial^3 P}{\partial t^3}\Delta t^2+O(\Delta t^3) &= -\kappa\left(\frac{\partial\dot{u}}{\partial x}+\frac{2}{2^3 3!}\frac{\partial^3\dot{u}}{\partial x^3}\Delta x^2+O(\Delta x^3)\right)\\
&\quad -\kappa\left(\frac{\partial\dot{v}}{\partial y}+\frac{2}{2^3 3!}\frac{\partial^3\dot{v}}{\partial y^3}\Delta y^2+O(\Delta y^3)\right)\\
&\quad -\kappa\left(\frac{\partial\dot{z}}{\partial z}+\frac{2}{2^3 3!}\frac{\partial^3\dot{w}}{\partial z^3}\Delta z^2+O(\Delta z^3)\right)
\end{aligned} \tag{1.60}$$

となり，さらに整理すれば

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\kappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\dot{u} + \frac{\partial}{\partial y}\dot{v} + \frac{\partial}{\partial z}\dot{w}\right)$$
$$+\frac{1}{24}((\frac{\partial^3 P}{\partial t^3}\Delta t^2 + \frac{\partial^3 \dot{u}}{\partial x^3}\Delta x^2 + \frac{\partial^3 \dot{v}}{\partial y^3}\Delta y^2 + \frac{\partial^3 \dot{w}}{\partial z^3}\Delta z^2)$$
$$+O(\Delta t^3) + O(\Delta x^3) + O(\Delta y^3) + O(\Delta z^3) \tag{1.61}$$

この場合の誤差の主要項は右辺第二項であり精度は 2 次である．

式 (1.59) を時間発展形の離散式に書き下せば

$$\begin{aligned} P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) = P^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) &- \kappa\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\ &-\kappa\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k) - \dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right) \\ &-\kappa\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2}) - \dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right) \end{aligned} \tag{1.62}$$

となる．

また同様にして (1.55) の各成分を離散化すると以下のようになる．この場合の各離散式の精度も同様に 2 次である．

$$\begin{aligned} \dot{u}^{n+1}(i+\frac{1}{2},j,k) &= \dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k) \\ &\quad -\frac{\Delta t}{\rho\Delta x}\left(P^{n+\frac{1}{2}}(i+1,j,k) - P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\ \dot{v}^{n+1}(j,i+\frac{1}{2},k) &= \dot{v}^n(j,i+\frac{1}{2},k) \\ &\quad -\frac{\Delta t}{\rho\Delta y}\left(P^{n+\frac{1}{2}}(i,j+1,k) - P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\ \dot{w}^{n+1}(i,j,k+\frac{1}{2}) &= \dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2}) \\ &\quad -\frac{\Delta t}{\rho\Delta x}\left(P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+1) - P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \end{aligned}$$

各成分の格子点上の位置関係については図 1.2を参照.

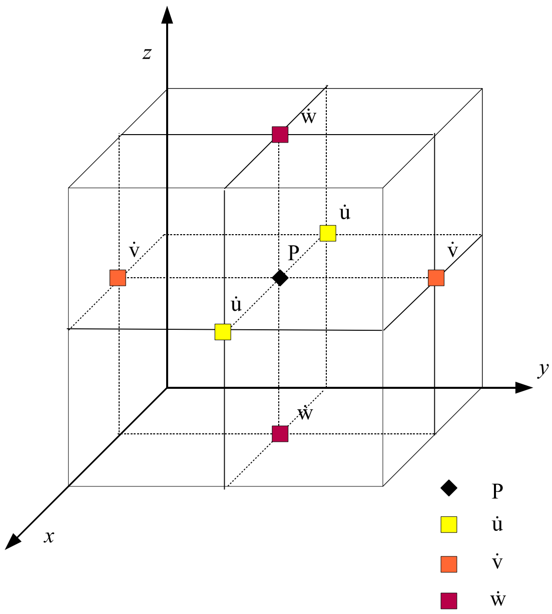

図 1.2: 音波の圧力と変位ベクトルを離散化しグリットに並べた図

2 次精度離散式 - 固体中の弾性波

(1.26) と (1.36) を時間と空間についての 2 次精度の中心差分で書き換える． まず (1.26) の第一式を差分にして書き下すと

$$
\begin{aligned}
\frac{T_1^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) - T_1^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)}{\Delta t} &= c_{11}\frac{\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta x} \\
&+ c_{12}\frac{\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k) - \dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)}{\Delta y} \\
&+ c_{12}\frac{\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2}) - \dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})}{\Delta z}
\end{aligned}
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
T_1^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= T_1^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&+ c_{11}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&+ c_{12}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right) \\
&+ c_{12}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right)
\end{aligned}
$$

となる.
n は時間ステップで (i,j,k) は三次元格子点 (x,y,z) を表す.Δt は時間の刻み幅で Δx,Δy,Δz はそれぞれ x 方向,y 方向,z 方向の空間刻み幅である. 以下同様にして, 残りの応力成

分を差分であらわせば,

$$
\begin{aligned}
T_2^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= T_2^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&+ c_{12}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&+ c_{11}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right) \\
&+ c_{12}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right) \\
T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= T_3^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&+ c_{12}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&+ c_{12}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right) \\
&+ c_{11}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right) \\
T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) &= T_4^{n-\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
&+ c_{44}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k+1)-\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)\right) \\
&+ c_{44}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\dot{w}^n(i,j+1,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})\right) \\
T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) &= T_5^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) \\
&+ c_{44}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k+1)-\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&+ c_{44}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{w}^n(i+1,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})\right) \\
T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) &= T_6^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) \\
&+ c_{44}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j+1,k)-\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&+ c_{44}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{v}^n(i+1,j+\frac{1}{2},k)-\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)\right)
\end{aligned}
$$

となる．また式 (1.36) についても同様にして速度ベクトル成分を計算できる．

$$
\begin{aligned}
\dot{u}^{n+1}(i+\frac{1}{2},j,k) &= \dot{u}^{n}(i+\frac{1}{2},j,k) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta x}\left(T_1^{n+\frac{1}{2}}(i+1,j,k)-T_1^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta z}\left(T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})-T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})\right) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta y}\left(T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)-T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)\right) \\
\dot{v}^{n+1}(i,j+\frac{1}{2},k) &= \dot{v}^{n}(i,j+\frac{1}{2},k) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta y}\left(T_2^{n+\frac{1}{2}}(i,j+1,k)-T_2^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta z}\left(T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})-T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta x}\left(T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)-T_6^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)\right) \\
\dot{w}^{n+1}(i,j,k+\frac{1}{2}) &= \dot{w}^{n}(i,j,k+\frac{1}{2}) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta z}\left(T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+1)-T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta y}\left(T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})-T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho\Delta x}\left(T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})-T_5^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})\right)
\end{aligned}
$$

セル中心を (i,j,k) に置くとする． (T_1,T_2,T_3) はこのセル中心にある．このときこのセル中心にある他の応力成分と粒子速度成分についてはLagrange多項式により補間する．精度は２次と４次を用意し選択可能にする．

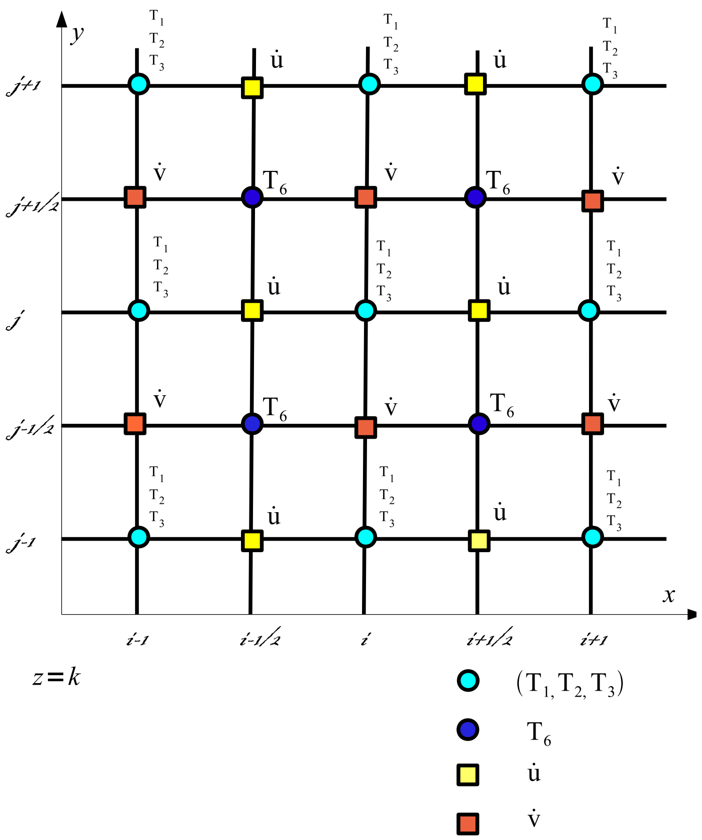

図 1.3: $z = k$ 面における離散化の図．垂直応力 (T_1, T_2, T_3)，せん断応力 T_6, 粒子速度 $\dot{u}, \dot{v}$ を各格子上に配置する．

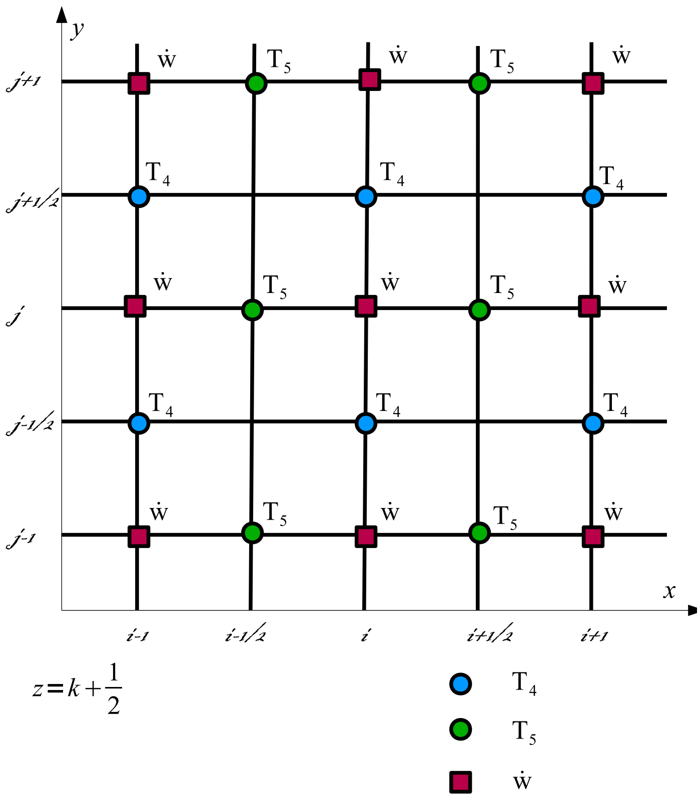

図 1.4: $z = k + 1$ 面における離散化の図．せん断応力 T_4, T_5 及び粒子速度 $\dot{w}$ を格子上に配置する．

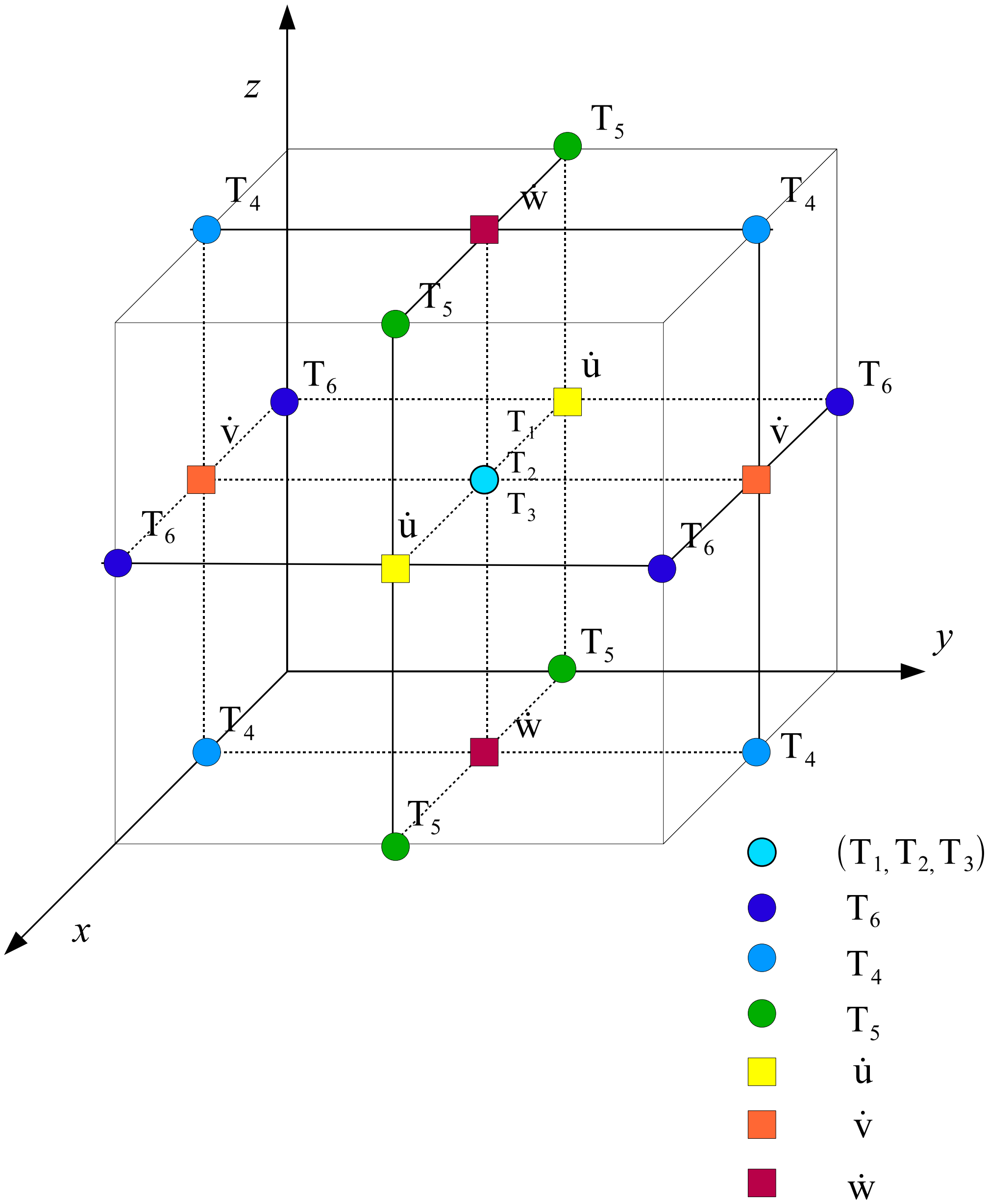
z
y
x
T5
T4
ẇ
T4
T5
T6
u̇
T6
v̇
T1
T2
v̇
T3
T6
u̇
T6
T5
T4
ẇ
T4
T5
(T1, T2, T3)
T6
T4
T5
u̇
v̇
ẇ

図 1.5: 離散化

1.3.2　時間 2 次精度及び空間 4 次精度の離散式

(1.26) と (1.36) を時間については式 (1.46) の 4 次精度中心差分式また時間については式 (1.45) の 2 次精度中心差分式を使用して書きくだす.

空間 4 次精度の離散式－音波

(1.1) また (1.2) を時間について２次精度，空間について４次精度の中心差分式を用いて離散化する．まず式 (1.1) を時間２次，空間４次の中心差分で書き下せば以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)-P^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)}{\Delta t}= \\
&-\kappa\left\{\frac{9(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k))}{8\Delta x}-\frac{\dot{u}^n(i+\frac{3}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{3}{2},j,k)}{24\Delta x}\right\} \\
&-\kappa\left\{\frac{9(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)-\dot{u}^n(i,j-\frac{1}{2},k))}{8\Delta x}-\frac{\dot{v}^n(i,j+\frac{3}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{3}{2},k)}{24\Delta x}\right\} \\
&-\kappa\left\{\frac{9(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2}))}{8\Delta x}-\frac{\dot{w}^n(i,j,k+\frac{3}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{3}{2})}{24\Delta x}\right\}
\end{aligned}
\tag{1.63}
$$

精度評価の為に P,$\dot{u}$,$\dot{v}$, と $\dot{w}$ をテーラー展開し上式に代入する．式 (1.51),(1.52) を参照．さらに整理すれば

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial P}{\partial t}=-\kappa\left(\frac{\partial}{\partial x}\dot{u}+\frac{\partial}{\partial y}\dot{v}+\frac{\partial}{\partial z}\dot{w}\right) \\
&+\frac{1}{24}\frac{\partial^3 P}{\partial t^3}\Delta t^2-\frac{3}{640}\left\{\Delta x^4\frac{\partial^5\dot{u}}{\partial x^5}+\Delta y^4\frac{\partial^5\dot{v}}{\partial y^5}+\Delta z^4\frac{\partial^5\dot{w}}{\partial z^5}\right\} \\
&+O(\Delta t^3)+O(\Delta x^5)+O(\Delta y^5)+O(\Delta z^5)
\end{aligned}
\tag{1.64}
$$

となる．誤差の主要項は第二項である．さらに式 (1.63) を時間発展形に書き直せば

$$
\begin{aligned}
P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= P^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&- \kappa\frac{9\Delta t}{8\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&+ \kappa\frac{\Delta t}{24\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{3}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{3}{2},j,k)\right) \\
&- \kappa\frac{9\Delta t}{8\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right) \\
&+ \kappa\frac{\Delta t}{24\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{3}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{3}{2},k)\right) \\
&- \kappa\frac{8\Delta t}{9\Delta x}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right) \\
&+ \kappa\frac{\Delta t}{24\Delta x}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{3}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{3}{2})\right)
\end{aligned}
\tag{1.65}
$$

また同様に (1.2) の各成分も離散化すると以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\dot{u}^{n+1}(i+\frac{1}{2},j,k) &= \dot{u}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k) \\
&-\frac{9\Delta t}{8\rho\Delta x}\left(P^{n+\frac{1}{2}}(i+1,j,k)-P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&+\frac{\Delta t}{24\rho\Delta x}\left(P^{n+\frac{3}{2}}(i+1,j,k)-P^{n+\frac{3}{2}}(i,j,k)\right) \\
\dot{v}^{n+1}(j,i+\frac{1}{2},k) &= \dot{v}^{n+\frac{1}{2}}(j,i+\frac{1}{2},k) \\
&-\frac{9\Delta t}{8\rho\Delta y}\left(P^{n+\frac{1}{2}}(i,j+1,k)-P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&+\frac{\Delta t}{24\rho\Delta y}\left(P^{n+\frac{3}{2}}(i,j+1,k)-P^{n+\frac{3}{2}}(i,j,k)\right) \\
\dot{w}^{n+1}(i,j,k+\frac{1}{2}) &= \dot{w}^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+\frac{1}{2}) \\
&-\frac{9\Delta t}{8\rho\Delta x}\left(P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+1)-P^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&+\frac{\Delta t}{24\rho\Delta x}\left(P^{n+\frac{3}{2}}(i,j,k+1)-P^{n+\frac{3}{2}}(i,j,k)\right)
\end{aligned}
\tag{1.66}
$$

空間 4 次精度の離散式－弾性波

(1.26) と (1.36) を時間について 2 次また空間については 4 次精度の中心差分で書き下す. まず例として (1.26) の T_1 について差分を実行する.

$$
\begin{aligned}
\frac{T_1^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) - T_1^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)}{\Delta t} &= c_{11}\frac{9\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right)}{8\Delta x} \\
&- c_{11}\frac{\dot{u}^n(i+\frac{3}{2},j,k) - \dot{u}^n(i-\frac{3}{2},j,k)}{24\Delta x} \\
&+ c_{12}\frac{9\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k) - \dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right)}{8\Delta y} \\
&- c_{12}\frac{\dot{v}^n(i,j+\frac{3}{2},k) - \dot{v}^n(i,j-\frac{3}{2},k)}{24\Delta y} \\
&+ c_{12}\frac{9\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2}) - \dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right)}{8\Delta z} \\
&- c_{12}\frac{\dot{w}^n(i,j,k+\frac{3}{2}) - \dot{w}^n(i,j,k-\frac{3}{2})}{24\Delta z}
\end{aligned}
$$

したがって T_1 について時間発展形に書けば以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
T_1^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= T_1^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&+ c_{11}\frac{9\Delta t}{8\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&- c_{11}\frac{\Delta t}{24\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{3}{2},j,k) - \dot{u}^n(i-\frac{3}{2},j,k)\right) \\
&+ c_{12}\frac{9\Delta t}{8\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k) - \dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right) \\
&- c_{12}\frac{\Delta t}{24\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{3}{2},k) - \dot{v}^n(i,j-\frac{3}{2},k)\right) \\
&+ c_{12}\frac{9\Delta t}{8\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2}) - \dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right) \\
&- c_{12}\frac{\Delta t}{24\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{3}{2}) - \dot{w}^n(i,j,k-\frac{3}{2})\right)
\end{aligned}
$$

以下同様にして, 残りの応力成分を差分であらわせば,

$$
\begin{aligned}
T_2^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= T_2^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&+ c_{12}\frac{9\Delta t}{8\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&- c_{12}\frac{\Delta t}{24\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{3}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{3}{2},j,k)\right) \\
&+ c_{11}\frac{9\Delta t}{8\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right) \\
&- c_{11}\frac{\Delta t}{24\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{3}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{3}{2},k)\right) \\
&+ c_{12}\frac{9\Delta t}{8\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right) \\
&- c_{12}\frac{\Delta t}{24\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{3}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{3}{2})\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= T_3^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&+ c_{12}\frac{9\Delta t}{8\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&- c_{12}\frac{\Delta t}{24\Delta x}\left(\dot{u}^n(i+\frac{3}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{3}{2},j,k)\right) \\
&+ c_{12}\frac{9\Delta t}{8\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right) \\
&- c_{12}\frac{\Delta t}{24\Delta y}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{3}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{3}{2},k)\right) \\
&+ c_{11}\frac{9\Delta t}{8\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right) \\
&- c_{11}\frac{\Delta t}{24\Delta z}\left(\dot{w}^n(i,j,k+\frac{3}{2})-\dot{w}^n(i,j,k-\frac{3}{2})\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) &= T_4^{n-\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
&+ c_{44}\frac{9\Delta t}{8\Delta z}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k+1)-\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)\right) \\
&- c_{44}\frac{\Delta t}{24\Delta z}\left(\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k+2)-\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k-1)\right) \\
&+ c_{44}\frac{9\Delta t}{8\Delta y}\left(\dot{w}^n(i,j+1,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})\right) \\
&- c_{44}\frac{\Delta t}{24\Delta y}\left(\dot{w}^n(i,j+2,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j-1,k+\frac{1}{2})\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) &= T_5^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) \\
&+ c_{44}\frac{9\Delta t}{8\Delta z}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k+1)-\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&- c_{44}\frac{\Delta t}{24\Delta z}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k+2)-\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k-1)\right) \\
&+ c_{44}\frac{9\Delta t}{8\Delta x}\left(\dot{w}^n(i+1,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})\right) \\
&- c_{44}\frac{\Delta t}{24\Delta x}\left(\dot{w}^n(i+2,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^n(i-2,j,k+\frac{1}{2})\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) &= T_6^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k) \\
&+ c_{44}\frac{9\Delta t}{8\Delta y}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j+1,k)-\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&- c_{44}\frac{\Delta t}{24\Delta y}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j+2,k)-\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j-1,k)\right) \\
&+ c_{44}\frac{9\Delta t}{8\Delta x}\left(\dot{v}^n(i+1,j+\frac{1}{2},k)-\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)\right) \\
&+ c_{44}\frac{\Delta t}{24\Delta x}\left(\dot{v}^n(i+2,j+\frac{1}{2},k)-\dot{v}^n(i-1,j+\frac{1}{2},k)\right)
\end{aligned}
$$

となる.
また速度ベクトル (1.36) についても同様にして中心差分をとり離散化すれば以下の

ようになる.

$$
\begin{aligned}
\dot{u}^{n+1}(i+\frac{1}{2},j,k) &= \dot{u}^{n}(i+\frac{1}{2},j,k) \\
&+ \frac{9\Delta t}{8\rho\Delta x}\left(T_1^{n+\frac{1}{2}}(i+1,j,k)-T_1^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&- \frac{\Delta t}{24\rho\Delta x}\left(T_1^{n+\frac{1}{2}}(i+2,j,k)-T_1^{n+\frac{1}{2}}(i-1,j,k)\right) \\
&+ \frac{9\Delta t}{8\rho\Delta z}\left(T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})-T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})\right) \\
&- \frac{\Delta t}{24\rho\Delta z}\left(T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{3}{2})-T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{3}{2})\right) \\
&+ \frac{9\Delta t}{8\rho\Delta y}\left(T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)-T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)\right) \\
&- \frac{\Delta t}{24\rho\Delta y}\left(T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k)-T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j-\frac{3}{2},k)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{v}^{n+1}(i,j+\frac{1}{2},k) &= \dot{v}^{n}(i,j+\frac{1}{2},k) \\
&+ \frac{9\Delta t}{8\rho\Delta y}\left(T_2^{n+\frac{1}{2}}(i,j+1,k)-T_2^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&- \frac{\Delta t}{24\rho\Delta y}\left(T_2^{n+\frac{1}{2}}(i,j+2,k)-T_2^{n+\frac{1}{2}}(i,j-1,k)\right) \\
&+ \frac{9\Delta t}{8\rho\Delta z}\left(T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})-T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})\right) \\
&- \frac{\Delta t}{24\rho\Delta z}\left(T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2})-T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k-\frac{3}{2})\right) \\
&+ \frac{9\Delta t}{8\rho\Delta x}\left(T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)-T_6^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)\right) \\
&- \frac{\Delta t}{24\rho\Delta x}\left(T_6^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k)-T_6^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{3}{2},j+\frac{1}{2},k)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{w}^{n+1}(i,j,k+\frac{1}{2}) &= \dot{w}^{n}(i,j,k+\frac{1}{2}) \\
&+ \frac{9\Delta t}{8\rho\Delta z}\left(T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+1) - T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&- \frac{\Delta t}{24\rho\Delta z}\left(T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+2) - T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k-1)\right) \\
&+ \frac{9\Delta t}{8\rho\Delta y}\left(T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right) \\
&- \frac{\Delta t}{24\rho\Delta y}\left(T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2}) - T_4^{n+\frac{1}{2}}(i,j-\frac{3}{2},k+\frac{1}{2})\right) \\
&+ \frac{9\Delta t}{8\rho\Delta x}\left(T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) - T_5^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})\right) \\
&- \frac{\Delta t}{24\rho\Delta x}\left(T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{3}{2},j,k+\frac{1}{2}) - T_5^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{3}{2},j,k+\frac{1}{2})\right)
\end{aligned}
$$

1.4 境界条件

1.4.1 想定する境界条件

想定する境界条件.

1. 真空との境界（自由境界）
   この場合の条件は境界での応力が 0 になる。図 1.6のように境界をとる．境界接点上の $\dot{v}$ での密度は $\frac{1}{6}\rho$ とし，$\dot{u}$ では $\frac{5}{6}\rho$ とする. 境界が $y = j + \frac{1}{2}$ にあるとして粒子速度ベクトル各々の成分を書き下すと以下のようになる．図 1.6, 図 1.7を参照

$$
\begin{aligned}
\dot{u}^{n+1}(i+\frac{1}{2},j,k) &= \dot{u}^{n}(i+\frac{1}{2},j,k) \\
&+ \frac{6}{5\rho}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(T_1^{n+\frac{1}{2}}(i+1,j,k) - T_1^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&+ \frac{6}{5\rho}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) - T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})\right) \\
\dot{v}^{n+1}(i,j+\frac{1}{2},k) &= \dot{v}^{n}(i,j+\frac{1}{2},k) \\
&+ \frac{6}{\rho}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(-T_2^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
\dot{w}^{n+1}(i,j,k+\frac{1}{2}) &= \dot{w}^{n}(i,j,k+\frac{1}{2}) \\
&+ \frac{6}{5\rho}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+1) - T_3^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k)\right) \\
&+ \frac{6}{5\rho}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(T_5^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) - T_5^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})\right)
\end{aligned}
$$

   応力ベクトルの成分は

$$
\begin{aligned}
T_1^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= T_1^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&+ c_{11}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{u}^{n}(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}^{n}(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\
&+ c_{12}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\dot{v}^{n}(i,j+\frac{1}{2},k) - \dot{v}^{n}(i,j-\frac{1}{2},k)\right) \\
&+ c_{12}\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(\dot{w}^{n}(i,j,k+\frac{1}{2}) - \dot{w}^{n}(i,j,k-\frac{1}{2})\right)
\end{aligned}
$$

   一方スカラ速度ポテンシャルとベクトル速度ポテンシャルを計算する際も境界

では同様の境界条件を適用する．まず式 (1.42) は

$$
\begin{aligned}
\phi^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= \phi^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&+ c_p^2\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\frac{5}{6}\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\frac{5}{6}\dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right\} \\
&+ c_p^2\frac{\Delta t}{\Delta y}\left\{\frac{1}{6}\dot{v}^n(i,j+\frac{1}{2},k)-\dot{v}^n(i,j-\frac{1}{2},k)\right\} \\
&+ c_p^2\frac{\Delta t}{\Delta z}\left\{\frac{5}{6}\dot{w}^n(i,j,k+\frac{1}{2})-\frac{5}{6}\dot{w}^n(i,j,k-\frac{1}{2})\right\}
\end{aligned} \tag{1.67}
$$

また式 (1.43) よりベクトル速度ポテンシャルは

$$
\begin{aligned}
A_1^{n+1}(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) &= A_1^n(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) \\
&- c_s^2\frac{\Delta t}{\Delta y}\left\{\frac{5}{6}\dot{w}^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+\frac{1}{2})-\dot{w}^{n+\frac{1}{2}}(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right\} \\
&- c_s^2\frac{\Delta t}{\Delta z}\left\{\dot{v}^{n+\frac{1}{2}}(i,j-\frac{1}{2},k+1)-\dot{v}^{n+\frac{1}{2}}(i,j-\frac{1}{2},k)\right\} \\
A_2^{n+1}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) &= A_2^n(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}) \\
&- c_s^2\frac{\Delta t}{\Delta z}\left\{\frac{5}{6}\dot{u}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+1)-\frac{5}{6}\dot{u}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k)\right\} \\
&- c_s^2\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\frac{5}{6}\dot{w}^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+\frac{1}{2})-\frac{5}{6}\dot{w}^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k+\frac{1}{2})\right\} \\
A_3^{n+1}(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k) &= A_2^n(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k) \\
&- c_s^2\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\dot{v}^{n+\frac{1}{2}}(i+1,j-\frac{1}{2},k)-\dot{v}^{n+\frac{1}{2}}(i,j-\frac{1}{2},k)\right\} \\
&- c_s^2\frac{\Delta t}{\Delta y}\left\{\frac{5}{6}\dot{w}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{w}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j-1,k)\right\}
\end{aligned} \tag{1.68}
$$

2. 媒質の異なる個体同士の境界
   異なる媒質の境界上の格子点においては、境界節点の前後で媒質条件を連続にするよう密度、スチフネステンソルの各成分は左右の両媒質の平均をとることにする。仮に二つの媒質の密度が ρ,ρ', スチフネステンソルの各成分が c,c' であ

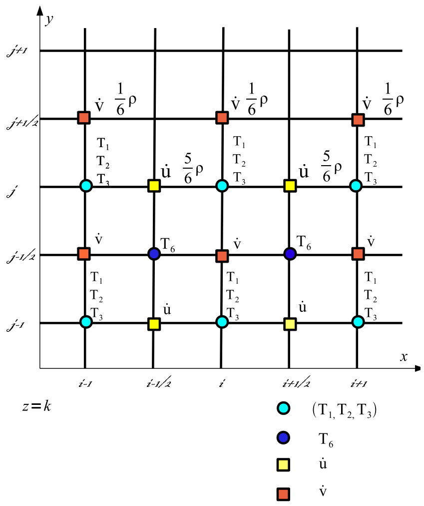

図 1.6: 自由境界,$z = k$

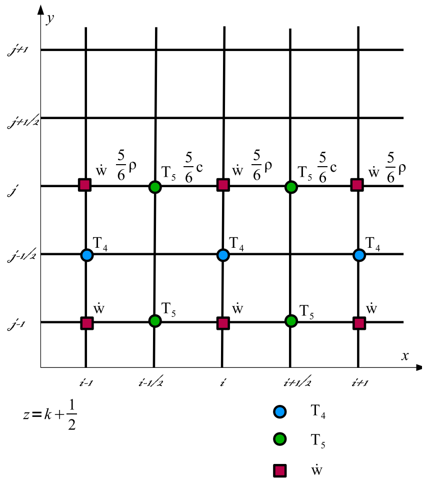

図 1.7: 自由境界,$z = k + \frac{1}{2}$

るとする．この場合に両媒質の接合においては密度、スチフネステンソルの各成分は $\frac{\rho+\rho'}{2}, \frac{2cc'}{c+c'}$ として計算する．

3. 気体（液体）と固体との境界
図 1.8と図 1.9を参照．図のように境界が x-y 面にある場合．気体 (液体) と固体との境界上でせん断応力 T_6 が零になる．

4. 周期境界条件

図 (1.10) は x 方向の計算領域を表した．ここでは $x = 0$ と $x = ix$ が境界であるとする．

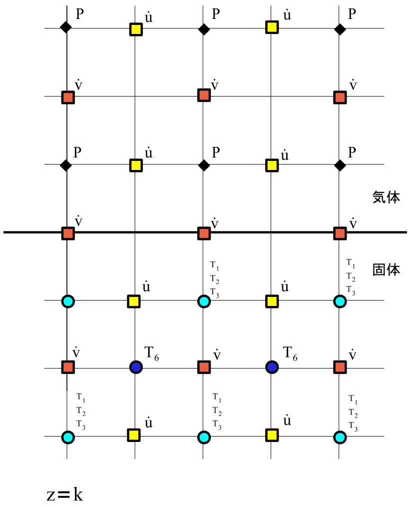

図 1.8: 液体と固体の境界.$z = k$

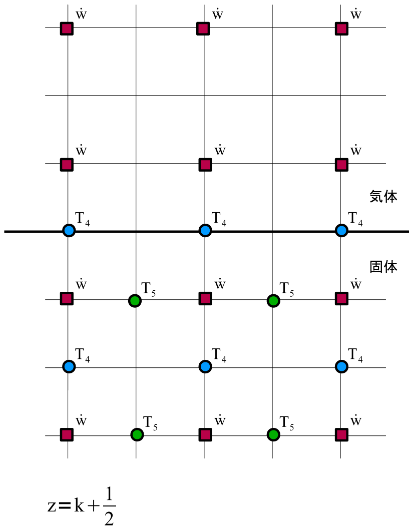

図 1.9: 液体と固体の境界.$z = k + \frac{1}{2}$

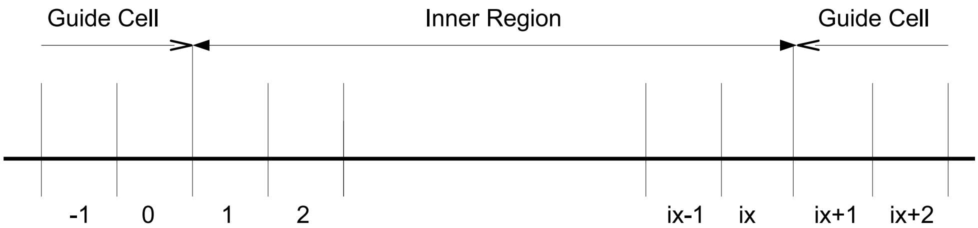

図 1.10: 計算領域のインデクス

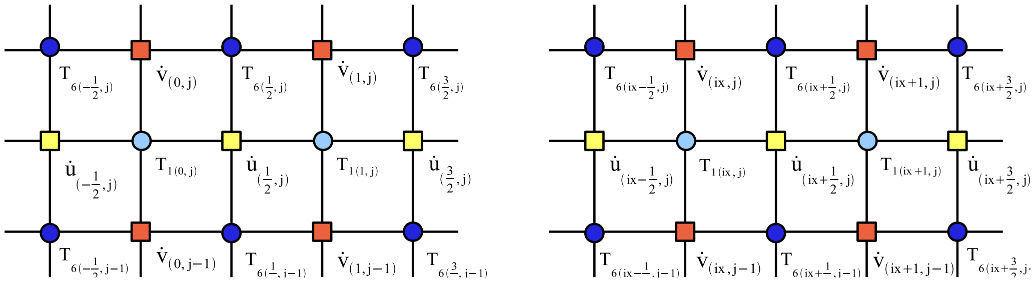

図 1.11: スタガード配置の変数インデクス

周期境界条件は図 (1.11) のスタガード変数配置では以下のように設定する．

$$\begin{cases} T_{1\sim4(-2)} = T_{1\sim4(ix-2)} & \dot{v}_{(-2)} = \dot{v}_{(ix-2)} & \dot{w}_{(-2)} = \dot{w}_{(ix-2)} \\ T_{1\sim4(-1)} = T_{1\sim4(ix-1)} & \dot{v}_{(-1)} = \dot{v}_{(ix-1)} & \dot{w}_{(-1)} = \dot{w}_{(ix-1)} \\ T_{1\sim4(0)} = T_{1\sim4(ix)} & \dot{v}_{(0)} = \dot{v}_{(ix)} & \dot{w}_{(0)} = \dot{w}_{(ix)} \\ T_{1\sim4(ix+1)} = T_{1\sim4(1)} & \dot{v}_{(ix+1)} = \dot{v}_{(1)} & \dot{w}_{(ix+1)} = \dot{w}_{(1)} \\ T_{1\sim4(ix+2)} = T_{1\sim4(2)} & \dot{v}_{(ix+2)} = \dot{v}_{(2)} & \dot{w}_{(ix+2)} = \dot{w}_{(2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u}_{(-\frac{5}{2})} = \dot{u}_{(ix-\frac{5}{2})} & T_{5,6(-\frac{5}{2})} = T_{5,6(ix-\frac{5}{2})} \\ \dot{u}_{(-\frac{3}{2})} = \dot{u}_{(ix-\frac{3}{2})} & T_{5,6(-\frac{3}{2})} = T_{5,6(ix-\frac{3}{2})} \\ \dot{u}_{(\frac{1}{2})} = \dot{u}_{(ix+\frac{1}{2})} & T_{5,6(\frac{1}{2})} = T_{5,6(ix+\frac{1}{2})} \\ \dot{u}_{(\frac{3}{2})} = \dot{u}_{(ix+\frac{3}{2})} & T_{5,6(\frac{3}{2})} = T_{5,6(ix+\frac{3}{2})} \\ \dot{u}_{(\frac{5}{2})} = \dot{u}_{(ix+\frac{5}{2})} & T_{5,6(\frac{5}{2})} = T_{5,6(ix+\frac{5}{2})} \end{cases}$$

5. 対称境界条件
   境界が x 面で対称なときには以下のように設定する．

$$\begin{cases} T_{1\sim4(-1)} = T_{1\sim4(2)} & \dot{v}_{(-1)} = \dot{v}_{(2)} & \dot{w}_{(-1)} = \dot{w}_{(2)} \\ T_{1\sim4(0)} = T_{1\sim4(1)} & \dot{v}_{(0)} = \dot{v}_{(1)} & \dot{w}_{(0)} = \dot{w}_{(1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u}_{(-\frac{3}{2})} = \dot{u}_{(\frac{5}{2})} & T_{5,6(-\frac{3}{2})} = T_{5,6(\frac{5}{2})} \\ \dot{u}_{(-\frac{1}{2})} = \dot{u}_{(\frac{3}{2})} & T_{5,6(-\frac{1}{2})} = T_{5,6(\frac{3}{2})} \end{cases}$$

6. 吸収境界条件 / 無反射境界条件
   計算空間は有限なので実際には存在しない境界 (壁) が計算領域の端にできる．この境界において吸収（無反射）境界を設定し波の計算領域の端での反射をな

くす．これらは吸収境界条件と呼ばれ PML 法や Mur の境界条件等多くの方法が提案されている．本ソルバーにおける吸収境界条件の設定には PML 法を使用する．

1.4.2 PML 境界条件

PML とは Perfectly Matched Layer の略であり，完全整合層とも呼ばれる． Berenger[2] により 1994 年に提案され、以後広く使われ発展している．電磁界解析で一般的に使われており，この方法では電気伝導度 ρ と仮想的な値である磁気伝道度 (磁気損失)ρ_μ を境界でインピーダンスマッチング条件をみたし反射率が零になるように設定する．このような仮想的な吸収媒質を境界に設置し，入射波を減衰させる． PML の問題点としては，使用メモリまた計算時間がかかる．また並列化が困難であることがあげられる. ただし PML 吸収境界は斜めに入射した波も扱え周波数にも依存せず，また吸収精度もよいので FDTD 計算によく使われている．

弾性波解析にも同様に減衰項を基本方程式に加える。減衰項は PML 境界内において値を持つように設定し， PML 境界内に入射してきた波が減衰するようにする．弾性波の基本方程式は式 (1.4) と式 (1.5) であるが，減衰項 σ 及び $\sigma*$ を式 (1.35) と式 (1.5) に加える．減衰項は PML 境界内部でのみ値を持つ．減衰項が 0 の時は通常の基本方程式と同じである．

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{T} + \sigma\boldsymbol{T} = [\tilde{c}\cdot\nabla_s\dot{\boldsymbol{U}} \tag{1.69}$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\dot{\boldsymbol{U}} + \sigma*\dot{\boldsymbol{U}} = \nabla\cdot\boldsymbol{T} \tag{1.70}$$

このとき応力ベクトルと粒子速度ベクトルの各成分について (x,y,x) の 3 成分に分割する． T_1 であれば $T_1 = T_{1x} + T_{1y} + T_{1z}$ のように分割する．この時 PML 境界内で式 (1.24) は応力につき 6 個また速度につき 3 個の計 9 個の連立方程式であるのでこの 3 倍の 27 個の連立方程式が必要になる．しかし基本的には媒質は等方的であると考えるので，式 (1.26) を使うので以下のように 24 個の連立方程式に展開できる．まず応

力について

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}T_{1x} + \sigma_x T_{1x} &= c_{11}\frac{\partial}{\partial x}(\dot{u}_x + \dot{u}_y + \dot{u}_z)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_{1y} + \sigma_y T_{1y} &= c_{12}\frac{\partial}{\partial y}(\dot{v}_x + \dot{v}_y + \dot{v}_z)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_{1z} + \sigma_z T_{1z} &= c_{12}\frac{\partial}{\partial z}(\dot{w}_x + \dot{w}_y + \dot{w}_z)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_{2x} + \sigma_x T_{2x} &= c_{12}\frac{\partial}{\partial x}(\dot{u}_x + \dot{u}_y + \dot{u}_z)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_{2y} + \sigma_y T_{2y} &= c_{11}\frac{\partial}{\partial y}(\dot{v}_x + \dot{v}_y + \dot{v}_z)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_{2z} + \sigma_z T_{2z} &= c_{12}\frac{\partial}{\partial z}(\dot{w}_x + \dot{w}_y + \dot{w}_z)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_{3x} + \sigma_x T_{3x} &= c_{12}\frac{\partial}{\partial x}(\dot{u}_x + \dot{u}_y + \dot{u}_z)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_{3y} + \sigma_y T_{3y} &= c_{12}\frac{\partial}{\partial y}(\dot{v}_x + \dot{v}_y + \dot{v}_z)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_{3z} + \sigma_z T_{3z} &= c_{11}\frac{\partial}{\partial z}(\dot{w}_x + \dot{w}_y + \dot{w}_z)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_{4z} + \sigma_z T_{4z} &= c_{44}\frac{\partial}{\partial z}(\dot{v}_x + \dot{v}_y + \dot{v}_z)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_{4y} + \sigma_y T_{4y} &= c_{44}\frac{\partial}{\partial y}(\dot{w}_x + \dot{w}_y + \dot{w}_z)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_{5z} + \sigma_z T_{5z} &= c_{44}\frac{\partial}{\partial z}(\dot{u}_x + \dot{u}_y + \dot{u}_z)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_{5x} + \sigma_x T_{5x} &= c_{44}\frac{\partial}{\partial x}(\dot{w}_x + \dot{w}_y + \dot{w}_z)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_{6y} + \sigma_y T_{6y} &= c_{44}\frac{\partial}{\partial y}(\dot{u}_x + \dot{u}_y + \dot{u}_z)\\
\frac{\partial}{\partial t}T_{6x} + \sigma_x T_{6x} &= c_{44}\frac{\partial}{\partial x}(\dot{v}_x + \dot{v}_y + \dot{v}_z)
\end{aligned}
\tag{1.71}
$$

また粒子速度ベクトルの各成分については

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\dot{u}_x + \sigma *_x \dot{u}_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(T_{1x} + T_{1y} + T_{1z})\\
&\frac{\partial}{\partial t}\dot{u}_z + \sigma *_z \dot{u}_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(T_{5x} + T_{5z})\\
&\frac{\partial}{\partial t}\dot{u}_y + \sigma *_y \dot{u}_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(T_{6x} + T_{6y})\\
&\frac{\partial}{\partial t}\dot{v}_y + \sigma *_y \dot{v}_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(T_{2x} + T_{2y} + T_{2z})\\
&\frac{\partial}{\partial t}\dot{v}_z + \sigma *_z \dot{v}_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(T_{4y} + T_{4z})\\
&\frac{\partial}{\partial t}\dot{v}_x + \sigma *_x \dot{v}_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(T_{6x} + T_{6y})\\
&\frac{\partial}{\partial t}\dot{w}_z + \sigma *_z \dot{w}_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(T_{3x} + T_{3y} + T_{3z})\\
&\frac{\partial}{\partial t}\dot{w}_y + \sigma *_y \dot{w}_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(T_{4y} + T_{4z})\\
&\frac{\partial}{\partial t}\dot{w}_x + \sigma *_x \dot{w}_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(T_{5x} + T_{5z})
\end{aligned}
\tag{1.72}
$$

となる．減衰項 σ は PML 内で以下のようにする．

$$
\sigma(r) = \sigma_{max}(\frac{r}{\delta})^n \tag{1.73}
$$

δ は PML 全体の厚さで r は境界面からの距離である。n は任意に設定する．電磁解析では一般的に $n = 4$ が使われているが，良い吸収率を達成させるためには音波及び弾性波解析には，整合条件や減衰項の値は，実際にプログラム上で検証する必要がある．

反射係数は入射角 θ の関数として以下のように表せられる．

$$
R(\theta) = [R(0)]^{\cos(\theta)} \tag{1.74}
$$

$$
R(0) = \exp[-\frac{2}{c_p}\int_0^{\delta}\sigma(r)dr] \tag{1.75}
$$

c_p は縦波速度である．

整合条件は

$$c_{11}\sigma = \sigma * /\rho \tag{1.76}$$
$$c_{12}\sigma = \sigma * /\rho \tag{1.77}$$
$$c_{44}\sigma = \sigma * /\rho \tag{1.78}$$
$$\tag{1.79}$$

この方程式を差分で書き下す．例として T_{1x} について時間及び空間 2 次精度の離散式を書く．このとき $T_{1x}^n(i,j,k)$ という値は FDTD 法では存在しないので以下の式で近似する．

$$T_{1x}^n(i,j,k) = \frac{T_{1x}^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) + T_{1x}^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)}{2} \tag{1.80}$$

すると T_{1x} については

$$\begin{aligned}\frac{T_{1x}^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) - T_{1x}^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)}{\Delta t} + \sigma\frac{T_{1x}^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) + T_{1x}^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)}{2} \\ = c_{11}\frac{\dot{u}_x^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}_x^n(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta x} \\ +c_{11}\frac{\dot{u}_y^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}_y^n(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta x} \\ +c_{11}\frac{\dot{u}_z^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}_z^n(i-\frac{1}{2},j,k)}{\Delta x}\end{aligned}$$

T_{1x} について時間発展形に書き直せば

$$\begin{aligned}T_{1x}^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= \left(\frac{1-\frac{\sigma\Delta t}{2}}{1+\frac{\sigma\Delta t}{2}}\right)T_{1x}^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\ &+ \frac{1}{1+\frac{\sigma\Delta t}{2}} \times \\ &\left\{c_{11}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{u}_x^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}_x^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right)\right. \\ &+ c_{11}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{u}_y^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}_y^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right) \\ &+ \left. c_{11}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\dot{u}_z^n(i+\frac{1}{2},j,k) - \dot{u}_z^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right)\right\}\end{aligned} \tag{1.81}$$

ここで $\frac{\sigma\Delta t}{2}=\alpha$ と置き，次の近似式を用いる．

$$1+\alpha = \exp[\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3}\cdots]$$
$$1-\alpha = \exp[-\alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^3}{3}\cdots]$$

そのとき

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \exp[2\alpha\cdots]$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{1}{1+\alpha} &= \frac{\sigma\Delta t}{\sigma\Delta x}\frac{1}{1+\alpha}\\ &= \frac{2\alpha}{\sigma\Delta x}\frac{1}{1+\alpha}\\ &= \frac{1}{\sigma\Delta x}\frac{2\alpha}{1+\alpha}\\ &= \frac{1}{\sigma\Delta x}\left\{1-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right\}\\ &= \frac{1}{\sigma\Delta x}\left\{1-\exp[-2\alpha]\right\}\end{aligned}$$

となる．これらの近似を用いて式 (1.81) を書き直せば

$$\begin{aligned}T_{1x}^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= \exp[-\sigma\Delta t]T_{1x}^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)\\ &+ \frac{1}{\sigma\Delta x}\left\{1-\exp[-\sigma\Delta t]\right\}\times\\ &\left\{c_{11}\left(\dot{u}_x^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}_x^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right)\right.\\ &+ c_{11}\left(\dot{u}_y^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}_y^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right)\\ &+ \left.c_{11}\left(\dot{u}_z^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}_z^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right)\right\}\end{aligned} \tag{1.82}$$

$\dot{u}_x$,$\dot{u}_y$,$\dot{u}_z$ は $\dot{u}$ にまとめる事ができるので結局以下の式になる．

$$\begin{aligned}T_{1x}^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= \exp[-\sigma\Delta t]T_{1x}^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)\\ &+ \frac{1}{\sigma\Delta x}\left\{1-\exp[-\sigma\Delta t]\right\}\times\\ &c_{11}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right)\end{aligned} \tag{1.83}$$

同様にして４次精度の差分式は

$$
\begin{aligned}
T_{1x}^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) &= \exp[-\sigma\Delta t]T_{1x}^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k) \\
&+ \frac{1}{\sigma\Delta x}\left\{1-\exp[-\sigma\Delta t]\right\}\times \\
& c_{11}\left\{\frac{9}{8}\left(\dot{u}^n(i+\frac{1}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{1}{2},j,k)\right)\right. \\
& \left.+\frac{1}{24}\left(\dot{u}^n(i+\frac{3}{2},j,k)-\dot{u}^n(i-\frac{3}{2},j,k)\right)\right\}
\end{aligned} \tag{1.84}
$$

右辺第二項はテーラー展開

$$
1-\exp[-\sigma\Delta t] \approx \sigma\Delta t - \frac{1}{2}(\sigma\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}(\sigma\Delta t)^3 + \cdots \tag{1.85}
$$

により

$$
\frac{1}{\sigma\Delta x}\left\{1-\exp[-\sigma\Delta t]\right\} \approx \frac{\Delta t}{\Delta x} - \frac{1}{2}\sigma\frac{\Delta t^2}{\Delta x} + \cdots \tag{1.86}
$$

となる．$\sigma \approx 0$ の時は

$$
\frac{1}{\sigma\Delta x}\left\{1-\exp[-\sigma\Delta t]\right\} \approx \frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{1.87}
$$

である．以下同様に応力の各成分と粒子速度の各成分も離散化する．

参考文献

[1] 佐藤雅弘,“FDTD 法による弾性振動・波動の解析入門”, 森北出版株式会社

[2] J-P.Berenger, “A perfectly mathed layer for absorption of electromagnetic waves” J.Comput. Phys., vol.114, no.1, pp. 185-200,1994