

# CIP-GCUP法のご提案

- ・燃焼、爆発、気液2相など物理量が激しく変化する  
場合の解析スキーム
- ・次世代特化型解析コードAEOLUSのカスタマイズ販  
売特化目的のモデリングをお客様と研究しご提案し  
ます。
  - ・流体計算 基本公式
  - ・流体計算 スキーム
  - ・CIP法を用いた圧縮・非圧縮流体計算(CIP-GCUP法)
  - ・高精度で効率的な計算のためのグリッドの工夫
  - ・混相流の課題
  - ・偏微分方程式の解の安定性

# 流体計算 基本式

## 圧縮性流体 基本式

$$\begin{aligned} & \partial Q / \partial t + \partial E / \partial x + \partial E / \partial y + \partial G / \partial z \\ & = 1 / \text{Re} (\partial R / \partial x + \partial S / \partial y + \partial T / \partial z) \end{aligned}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho e + p)u \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (\rho e + p)v \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw + p \\ (\rho e + p)w \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \\ R5 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zy} \\ S5 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ T5 \end{pmatrix}$$

$$R5, S5, T5 = \text{func}(\tau_{ij}, u, v, w, \varepsilon, \mu, p, k)$$

## 非圧縮性流体 基本式

$$\nabla \cdot V = 0$$

$$\partial V / \partial t + (V \cdot \nabla) V = -1/\rho \cdot \nabla p + \mu/\rho \cdot \Delta V$$

# 流体計算スキーム

## CIP法

圧縮・非圧縮  
統一解法

### 差分法

- ・MAC法 圧力ベース解法
- ・SIMPLE法 圧力ベース解法

### 境界要素法(積分方程式法)

- ・ポテンシャル流れ解析(渦なし)
- ・直接法(境界積分方程式)
- ・間接法(特異点法)

### 有限要素法

- ・SUPG法

・

### 差分法

- ・陽的スキーム
  - ・オイラー陽解法
  - ・ラックス法
  - ・ラックス ヴェンドルフ法(2次補間)
    - ・マコーマック法(予測子・修正子)
  - ・FLIC法(有限体積法)
  - ・ルンゲ クッタ法
- ・陰的スキーム
  - ・オイラー陰解法
  - ・克蘭ク-ニコルソン差分

### 境界要素法

- ・微小擾乱ポテンシャル流れ解析

### 有限要素法

- ・SUPG法
- ・TG法
- ・2段階解法

非圧縮性

圧縮性

# CIP法を用いた圧縮・非圧縮流体計算(CIP-GCUP法)

## セミ・ラグランジュ解法

流体の一般式  $\partial f / \partial t + \partial (f \cdot u) / \partial x = h$  より  
移流項と 非移流項をもとめ 独立に解く。

移流項  $\partial f / \partial t + u \cdot \partial f / \partial x = 0$

$$\partial g / \partial t + u \cdot \partial g / \partial x = 0$$

非移流項  $\partial f / \partial t = H$

$$\partial g / \partial t = H' - g(\partial u / \partial x)$$

移流項  $\partial f / \partial t + u \partial f / \partial x = 0$  を解く。

格子点間を 3次多項式で補間。

補間式係数  $a, b$  を求め 時間展開。

$$f_i^{n+1} = a_i(u \Delta t)^3 + b_i(u \Delta t)^2 + g_i^n(u \Delta t) + f_i^n$$

$$g_i^{n+1} = 3a_i(u \Delta t)^2 + 2b_i(u \Delta t) + g_i^n$$

非移流項 移流項より求めた解  $(f_i^*, g_i^*)$  を  
用いより 下記より求める。

$$f_i^{n+1} = f_i^* + H_i \cdot \Delta t$$
$$(g_i^{n+1} - g_i^*) / \Delta t = (f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}) / 2 \cdot \Delta x \cdot \Delta t$$
$$- (f_{i+1}^* - f_{i-1}^*) / 2 \cdot \Delta x \cdot \Delta t - (\partial u / \partial x)_i g_i^*$$

## CIP-GCUP法

- ・圧縮/非圧縮の統一解法
- ・固体・液体・気体の統一解法
- ・状態方程式とカップルさせての解法

## 応用分野

- ・燃焼・爆発など反応を伴う計算
- ・衛星大気圏突入計算
- ・レーザーやアーク溶接計算

# 高精度で効率的な計算のためのグリッドの工夫

## マルチ ブロック法

複雑な形状のまわりの流れ場を 複数の直方体ブロックに分割し取り扱う方法

・境界では格子点を共有

各ブロック毎に最適な流体計算を行い ブロック間のデータやり取りを行う。

格子形成が比較的容易であり 航空機や自動車の周りの流体計算に応用。

## 重なり格子法

複数の物体の周りに夫々の独立な格子を設定、格子の重合部分での情報やり取りにより全体を計算。

複雑な場を離散化し易い、時間的に移動する格子を取り入れる事も出来る。

ヘリコプター機体まわりやトンネルに突入する列車まわりの計算に応用。

## アダプティブ グリッド

必要な場所にグリッドを集中させる。

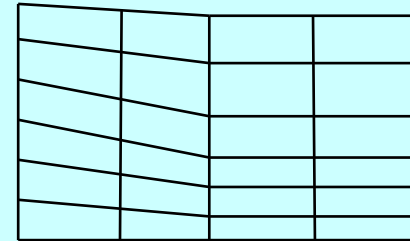
流れの計算結果をもとに 格子点を移動

・・・解適合格子法

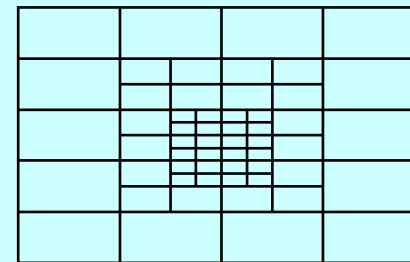
2点でのモニター量の平均値  $w_{i+1/2}$  を

$$w_{i+1/2} \cdot (s_{i+1} - s_i) = \text{一定}$$

の条件下で 格子点  $s_i, s_{i+1}$  を設定。



新たな格子点を追加 削除



# 混相流の課題

## 流動パターン

- ・気泡流 ・スラグ流 ・フロス流
- ・環状噴霧流 ・噴霧流

## 混相流特有のパラメータ

- ・ボイド率 質量混合比  
気液二相流の場合 気相が占める体積割合 =  $\alpha$
- ・スリップ比  
密度差に起因する 圧力勾配、外力の影響差  
 $S = u_g / u_l$  又は  $u_r = u_g - u_l$
- ・平均密度 平均流速  
平均密度  $\rho_m = \alpha \rho_g + (1 - \alpha) \rho_l$   
質量平均  $u_m = (\rho_g \alpha u_g + \rho_l (1 - \alpha) u_l) / \rho_m$   
体積平均  $j_T = \alpha u_g + (1 - \alpha) u_l$
- ・質量界面伝達係数
- ・運動量界面伝達係数
- ・エネルギー界面伝達係数
- ・壁面摩擦係数

## 基本方程式

質量保存;

$$\partial(\rho_k \alpha_k) / \partial t + \partial(\rho_k \alpha_k) / \partial z = \Gamma_k$$

運動量保存;

$$\partial(\rho_k \alpha_k u_k) / \partial t + \partial(\rho_k \alpha_k u_k^2) / \partial z = -F_{wk} - F_{ik} - F_{gk} - \alpha_k \partial p / \partial z + \Gamma_k u_{ki}$$

エネルギー保存;

$$\begin{aligned} \partial\{\rho_k \alpha_k (e_k + 1/2 \cdot u_k^2)\} / \partial t + \partial\{\rho_k \alpha_k (e_k + 1/2 \cdot u_k^2) u_k\} = \\ -F_{wk} u_k - F_{ik} u_k - F_{gk} u_k \\ -p \partial \alpha_k / \partial t - \partial(\alpha_k p u_k) / \partial z \\ + \Gamma_k (h_{ki} + 1/2 \cdot u_{ki}^2) + q_{wk} + q_{ik} \end{aligned}$$

## 課題

- ・解の安定性や不適切問題の解決

# 偏微分方程式の解の安定性

## 解の安定性

非平衡二流体モデルでは双曲型にならないものがある。

Nucl. Sci. Engrg. , 66 p378  
R. W. Lyczkowski et al

数学的には 双曲型の偏微分方程式は任意の初期値に対して唯一解が存在する。

Commun. Pure Appl. Math. ,2 p255  
R. W. Corant et al

解決のための手法／モデル …

・付加質量項（運動量界面伝達項）

上記 R. W. Lyczkowski et al

・二圧力モデル（2圧力を設定）

J. Comp. Phys. , 53 p124  
V. H. Ramson et al

・分散性二相流（圧力勾配が働かない）

混相流 7(2) p132  
片岡 他

## 付加質量モデル…

流体中で非定常運動する球形剛体に働く力

$$f_{VM} = 1/2 \cdot \pi/6 \cdot d^3 \cdot \rho \cdot (du_{\infty}/dt - du_d/dt)$$

…気泡によって排除された液体質量に比例する力

$$f_B = 3/2 d^2 (\pi \rho \mu)^{1/2}$$

$$\cdot \int (d\mu_{\infty}/d\xi - du_d/d\xi) / (t - \xi)^{1/2} d\xi$$

…液体の流れから気泡がそれた効果

界面での運動量伝達項に付加質量を追加

Zuber の付加質量

$$\rho C_{VM} = \rho \cdot \alpha_d \cdot (1 + 2\alpha_d) / \{2 \cdot (1 - \alpha_d)\}$$

$\alpha$  はボイド率

Ishii & Mishima の付加質量

気泡流

$$\rho C_{VM} = \rho \cdot 1/2 \cdot (1 + 2\alpha) / (1 - \alpha)$$

スラグ流

$$\rho C_{VM} = \rho \cdot 5 \cdot \alpha \cdot [0.66 + 0.34 \{(1 - D_b / L_b) / (1 - D_b / 3L_b)\}]$$

# 偏微分方程式の解の安定性(続)

## 二圧力モデル・・・

5E2Pモデル (5方程式2圧力)

$$U^T = (\alpha_2 \rho_2, \alpha_2 \rho_2 u_2, \alpha_1 \rho_1, \alpha_1 \rho_1 u_1, \alpha_1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_2^2 - u_2^2 & 2u_2 & 0 & 0 & -P_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1^2 - u_1^2 & 2u_1 & P_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (u_1 + u_2)/2 \end{pmatrix}$$

とおけば 本モデルの方程式は

$$\partial U / \partial t + A \partial U / \partial x = 0 \text{ となる。}$$

固有方程式  $\det(\lambda I - A) =$

$$[(\lambda - u_2)^2 - c_2^2][(\lambda - u_1)^2 - c_1^2](\lambda - (u_1 + u_2)/2) = 0$$

より 根は  $u_n \pm c_n, (u_1 + u_2)/2$  であり実数。

したがい 方程式は 双曲型であり唯一解が存在する。

本モデルの方程式は well-posed。

## 分散性二相流モデル・・・

質量保存方程式  $g, l$  それぞれの相に対して

$$\partial \alpha / \partial t + v_g \cdot \partial \alpha / \partial x + \alpha \partial v_g / \partial x = 0$$

$$\partial (1 - \alpha) / \partial t + v_l \cdot \partial (1 - \alpha) / \partial x$$

$$+ (1 - \alpha) \cdot \partial v_l / \partial x = 0$$

運動方程式

$$\partial v_g / \partial t + v_g \cdot \partial v_g / \partial x = -\xi / \rho_g \cdot \partial p / \partial x$$

$$\partial v_l / \partial t + v_l \cdot \partial v_l / \partial x = -1 / \rho_l \cdot \partial p / \partial x$$

上記方程式系は

$$A \partial F / \partial t + B \partial F / \partial x = 0 \text{ と表され}$$

固有方程式  $\det(A\lambda + B) = 0$  の根  $\lambda$  が

複素数の場合 楕円型となり不適切 (ill-posed) となる。

$$\rho_g \cdot (1 - \alpha) \cdot (\lambda + u_g)^2 + \xi \cdot \rho_l \cdot \alpha \cdot (\lambda + u_l)^2 = 0$$

より 判別式  $D$  は

・  $\xi = 1$  (一圧力モデル) の場合

$$D = -\rho_g \cdot \rho_l \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot \xi \cdot (u_g - u_l)^2$$

実根をもつのは  $u_g = u_l$  の場合のみ

したがい  $u_g = u_l$  の場合のみ well-posed。

・  $\xi = 0$  (分散性二相流モデル 圧力勾配が働かない)

の場合 常に根は実数であり well-posed。